УДК 51.001.8
DOI 10.33764/2618-8031-2020-1-180-184

ОБ «ЭФФЕКТИВНЫХ» АЛГОРИТМАХ В ЗАДАЧАХ О ПРОЦЕССАХ

Юрий Михайлович Вахромеев
Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), 630008, Россия, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, тел. (383)266-27-58, e-mail: tvakhromeeva@gmail.com

Татьяна Васильевна Вахромеева
Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), 630008, Россия, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113, ст. преподаватель кафедры высшей математики, тел. (383)266-27-58, e-mail: tvakhromeeva@gmail.com

В работе анализируется одна из задач на процессы. Рассматриваемая задача предлагалась на Международной интернет-олимпиаде в 2019 г. В работе рассматривается ее решение несколькими способами, особо выделен вариант решения для общего случая. Этот вариант позволяет решить задачу более эффективным способом. Результат может быть полезен как для тех, кто ведет математические кружки, так и студентам, участвующим в олимпиадах, тем, кто любит разбираться в сложных ситуациях, находить красивые решения.

Ключевые слова: олимпиада, эффективность, процессы, задача, массив, коэффициенты, бином Ньютона.

"EFFICIENT" ALGORITHMS IN THE PROCESS TASKS

Yury M. Vakhromeev
Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), 113, Leningradskaya St., Novosibirsk, 630008, Russia, Ph. D., Associate Professor, Department of Higher Mathematics, phone: (383)266-27-58, e-mail: tvakhromeeva@gmail.com

Tatyana V. Vakhromeeva
Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), 113, Leningradskaya St., Novosibirsk, 630008, Russia, Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, phone: (383)266-27-58, e-mail: tvakhromeeva@gmail.com

The paper analyzes one of the tasks for processes. We consider the problem that was proposed at the International Internet Olympiad in 2019. Solutions of this problem for the general case are considered. This option allows solving the problem in a more efficient way. The result can be useful for both those who work in mathematical circles, students participating in Olympiads, and those who are interested in difficult tasks, and beautiful solutions.

Key words: olympiad, efficiency, processes, problem, array, coefficients, Newton binomial.

Основываясь на опыте работы математического кружка в техническом вузе можно отметить, что большинство студентов считают работу над задачей законченной, если найдено какое-либо ее решение. Одной из задач руководителя кружка является стимулирование поиска других способов решения той же задачи и обоснование оптимальности полученного решения.

На математических олимпиадах задачи о «процессах», когда что-то последовательно происходит по некоторым правилам, стоят особняком. Часто это некоторое множество точек, клеток, узлов, в которых шаг за шагом вычисляются характеристики. В силу необычности постановки таких задач, полезно посвятить им одно или несколько занятий математического кружка. Рассмотрим ситуацию подробнее. Выделим две характеристики решения таких задач: «эффективность» и «многослойность, многовариантность» [1, 2].

Под эффективностью решения можно понимать адекватность описания процесса. Иногда исходным правилам можно придать более удобную для вычисления формулу. В идеале, постараться получить формулу для вычисления искомых величин в заданной точке, как функцию ее координат. Под многослойностью можно понимать решения разной эффективности. Это, кстати, дает возможность по-разному оценивать решенную студентом задачу [3].

В качестве примера рассмотрим задачу, которая предлагалась на Международной интернет-олимпиаде в 2019 г.

Задача. Координатная плоскость разбита на единичные квадраты. В начале координат находится 2^x точек, половина из которых начинает двигаться в положительном направлении оси Ox, а другая половина – в положительном направлении оси Oy. При достижении любой вершины квадрата каждая группа точек разделяется на две части – половина движется в положительном направлении оси Ox, а другая половина – в положительном направлении оси Oy. Известно, что через вершину квадрата $M(4;8)$ прошло 7 920 точек. Чему равно значение x?

1. Из условия задачи следует, во-первых, что процесс происходит в 1-м квадранте плоскости Oxy. Во-вторых, процесс симметричен относительно биссектрисы 1-го координатного угла.

На 1-м шаге деления точками заполняются вершины (1,0) и (0,1). На втором шаге точки покидают вершины (1,0), (0,1) и заполняют вершины (0,2), (2,0), (1,1) и т. д. На каждом шаге точки заполняют вершины, расположенные на параллельных прямых, ортогональных биссектрисе первого координатного угла. Назовем эти прямые фронтом. Чем дальше вершина от начала координат, тем меньше точек через нее проходит. Если в начале процесса было 2^x точек и $x \in N$, процесс закончится, если в каждой из заполненных вершин будет по нечетному числу точек. Если x – некоторое число, то процесс будет протекать сколь угодно долго и все точки первого квадранта могут быть заполнены на некотором шаге.

Самый простой способ – решить задачу решить ее перебором. Используя условие задачи найти последовательно, какое количество точек проходит через каждую из вершин 45 квадратов в прямоугольнике с вершинами $A(4,0)$, $O(0,0)$, $B(0,4)$, $C(4,8)$. На последнем шаге находим количество точек, которое проходит через вершину $C(4,8)$. Эти величины будут зависеть от x, и мы приходим к уравнению $495 \cdot 2^{x-12} = 7\,920$, $x = 16$. Этот способ подходит в том случае, если вершина квадрата находится достаточно близко к началу координат.

2. Можно упростить решение, если найти некоторое правило, чтобы заполнить массив из 45 точек, модифицируя условие задачи.

Заметим, что через вершины, расположенные на осях Ox и Oy $A_1(1,0)$, $A_2(2,0), ..., A_k(k,0)$, $B_1(0,1), B_2(0,2), ..., B_k(0,k)$ проходит соответственно $2^{x-1}, 2^{x-2}, ..., 2^{x-k}$ точек. Сначала заполним квадрат $A_2(2,0)$, $O(0,0)$, $B_2(0,2)$, $C(2,2)$.

$$\begin{pmatrix} 2^{x-2} & 3 \cdot 2^{x-3} & 6 \cdot 2^{x-4} \\ 2^{x-1} & 2 \cdot 2^{x-2} & 3 \cdot 2^{x-3} \\ 2^{x} & 2^{x-1} & 2^{x-2} \end{pmatrix}.$$

В вершинах, через которые проходит фронт, степень двойки одна и та же.

Рассмотрим матрицу коэффициентов при степенях двойки. Как и ожидалось, матрица симметрична относительно вспомогательной диагонали.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Замечаем, что коэффициенты второго и третьего столбца равны сумме коэффициентов, стоящих слева и снизу заполняемого элемента. Это правило работает и в общем случае. Пусть i и j – координаты вершины $M(i, j)$, i = 0, 1, 2, …, j = 0, 1, 2, … . Вершины, стоящие слева и снизу от заполняемой вершины, расположены на фронте. Пусть количество точек, которые проходят через вершину снизу $m \cdot 2^{x-(i+j)}$, а через вершину слева $n \cdot 2^{x-(i-1+j-1)}$. По условию, в заполняемой вершине количество точек

$$\frac{1}{2} m \cdot 2^{x-(i+j)} + \frac{1}{2} n \cdot 2^{x-(i-1+j-1)} = \frac{1}{2} 2^{x-(i+j)} (m+n) = 2^{x-(i+j+1)} (m+n).$$

То есть, коэффициент при вершине $M(i, j+1)$ равен сумме соответствующих коэффициентов.

Используя симметрию и сформулированное выше правило находим коэффициенты для массива вершин в прямоугольнике $A(4,0)$, $O(0,0)$, $B(0,4)$, $C(4,8)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 45 & 165 & 495 \\ 1 & 8 & 36 & 120 & 330 \\ 1 & 7 & 28 & 84 & 210 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Таким образом, через вершину C(4,8) проходит $2^{x-12}\cdot 495$ точек и, по условию $495\cdot 2^{x-12}=7\,920,\ x=16$. Фактически нам пришлось определять коэффициенты только в 26 вершинах, складывая целые числа, что заметно проще, чем в п. 1.

3. Наконец, учитывая симметрию, можно заметить, что в вершинах, которые образуют фронт, коэффициенты являются биномиальными коэффициентами C_n^k, $n=1,2,3...;\ k=0,1,2,...,n$, где n – индекс фронта. Для вершин фронта (i,j) $i+j=n$, n – определяет степень удаленности фронта от начала координат.

Докажем это утверждение методом математической индукции.

На первом шаге, после начала процесса, фронт проходит через вершины $B_1(0,1)$ и $A_1(1,0)$. Коэффициенты этих вершин равны единице. Поскольку $1=C_1^0$, $1=C_1^1$, то вершинам B_1 и A_1 соответствуют биномиальные коэффициенты при n = 1. Будем говорить фронт с индексом 1 или фронт 1.

Предположим теперь, что фронту n соответствуют коэффициенты C_n^k, $k=0,1,2,...,n$. По правилу (1) коэффициенты $d_{n,k}$ фронта n + 1 вычисляются по формуле $C_n^k+C_n^{k+1}=d_{n+1,k+1}$. Здесь n – индекс фронта, k + 1 – номер столбца, в котором стоит коэффициент $d_{n+1,k+1}$. Коэффициенты C_n^k и C_n^{k+1} фронта n стоят в k-м и k + 1 столбце соответственно. По свойству биномиальных коэффициентов $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$.

Тогда $d_{n+1,k+1}=C_{n+1}^{k+1},\ k=0,1,...,n$. Следовательно, вершинам фронта с индексом n + 1 соответствуют коэффициенты бинома Ньютона, кроме вершины $B(0,n)$. Но этой вершине соответствует коэффициент равный единице. Так как $1=C_{n+1}^0$, утверждение доказано.

Таким образом, количество точек, проходящих через вершину (k, m) определяется по формуле

$$N(k,m)=2^{x-(k+m)}C_{k+m}^k. \qquad (3)$$

Найдем сумму всех точек, которые проходят через вершины, расположенные на фронте. Пусть фронт проходит через вершину $C(i,j)$ $i + j = n$.

Тогда сумма всех точек равна:

$$2^{x-n} \cdot C_n^0 + 2^{x-n} \cdot C_n^1 + \ldots + 2^{x-n} \cdot C_n^n =$$
$$= 2^{x-n}\left(C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n\right) = 2^{x-n} \cdot (1+1)^n = 2^{x-n} \cdot 2^n = 2^x.$$

То есть сумма точек в вершинах фронта равна количеству точек в момент начала процесса.

Решим исходную задачу наиболее оптимальным способом, используя (3).

Через вершину $C(4,8)$ проходит $2^{x-12} \cdot C_{12}^4$ точек. По условию,

$$2^{x-12} \cdot C_{12}^4 = 7\,290,\ \ C_{12}^4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495,$$

$$495 \cdot 2^{x-12} = 7\,920,\ \ 2^{x-12} = 2^4,\ \ x = 16.$$

Очевидно, при таком подходе, степень удаленности вершины от начала координат не имеет решающего значения. Например, если в начале процесса в точке $O(0,0)$ находилось 2^{22} точек, то достаточно просто найти, сколько точек пройдет через вершину $C(10,11)$. Через эту вершину пройдет $2^{22-21} \cdot C_{21}^{10} = 2 \cdot \dfrac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \ldots 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots 10} = 705\,432$ точки.

Понятно, что решить перебором задачу, предложенную вначале практически невозможно, если вершина достаточно далеко удалена от начала координат. Решение п. 1 предполагает вычисления количества точек в 46 вершинах, а в п. 2 фактически в 26 вершинах. Причем вычисления сводятся к суммированию целых чисел. Решение в п. 3 позволяет вычислять количество точек, проходящих через некоторую вершину по ее координатам. В этом случае можно говорить о максимально эффективном решении.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нестандартные задачи по математике : учеб. пособие для подготовки студентов к олимпиадам / И. А. Бертик, Л. А. Багина, Ю. М. Вахромеев, Т. В. Вахромеева, Ю. А. Чиркунов. – Новосибирск : Изд-во НГАСУ (Сибстрин), 2017. – 104 с.

2. Вахромеев Ю. М., Вахромеева Т. В. О много вариантности в решении олимпиадных задач // АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ОБРАЗОВАНИЯ. Роль университетов в формировании информационного общества. Междунар. науч.-метод. конф. : сб. материалов в 2 ч. (Новосибирск, 29 января – 2 февраля 2018 г.). – Новосибирск : СГУГиТ, 2018. Ч. 1. – С. 205–211.

3. Вахромеев Ю. М., Вахромеева Т. В. О стратегии поведения участников олимпиады при решении нестандартных задач // АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ОБРАЗОВАНИЯ. Современные тренды непрерывного образования в России. Междунар. науч.-метод. конф. : сб. материалов в 3 ч. (Новосибирск, 25–28 февраля 2019 г.). – Новосибирск : СГУГиТ, 2019. Ч. 3. – С. 35–42.